Formelsammlung Elektrotechnik I

Roman Ehrler

7. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Basics

1.1 Widerstand

Der Widerstand R hat die Einheit $[\Omega]$. Er ist definiert als:

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{L}{A}}$$

, wobei ρ der spezifische Widerstand $[\Omega\ \mathrm{m}]$, L die Länge $[\mathrm{m}]$ und A der Querschnitt $[\mathrm{m}^2]$ sind.
Der elektrische Leitwert ist definiert:

$$G = \frac{1}{R} \quad [\mathrm{S}]$$

Weiter ist die Leitfähigkeit κ gegeben als:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad \left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}\right]$$

1.1.1 Wärmeabhängiger Widerstand

Der wärmeabhängige spezifische Widerstand ist definiert als:

$$\boxed{\rho(T) = \rho(T_0) \cdot [1 + \alpha(T - T_0)]}$$

1.2 Strom

Der Strom ist definiert als:

$$\boxed{I = \lim_{\Delta T \to \infty} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right) = \frac{\partial Q}{\partial t}}$$

, also als die Änderung der Ladung pro Zeit.
Die Stromdichte ist:

$$J = \frac{I}{A} \quad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

1.3 Spannung

Die Spannung ist definiert als:

$$\boxed{U = \Delta\varphi = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{W}{q} = -\int_a^b \underline{E} \cdot d\underline{s}}$$

Also als die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten a und b.

1.4 Ohm'sches Gesetz

$$\boxed{U = R \cdot I}$$

Symbol	Bedeutung	Einheit
U	Spannung	[V] Volt
R	Widerstand	$[\Omega]$ Ohm
I	Strom	[A] Ampère

1.5 Leistung

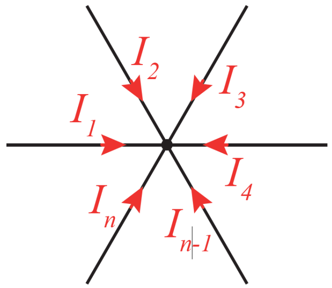
$$\boxed{P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad [\mathrm{W}]}$$

1.6 Elektrische Energie

$$\boxed{W = U \cdot I \cdot t \quad [\mathrm{J}]}$$

1.7 Knotengleichung

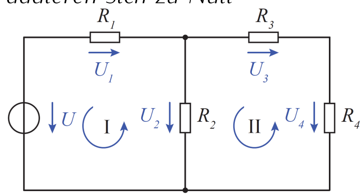
zufliessende Ströme in einen Knoten = abfliessende Ströme aus dem Knoten



$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0}$$

1.8 Maschengleichung

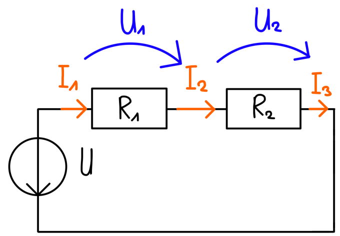
alle Spannungen in einer geschlossenen Masche addieren sich zu Null



$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k = 0}$$

2 Netzwerkanalyse

2.1 Serieschaltung



Für die Serieschaltung gilt:

$$R_{\mathrm{tot}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_i$$

$$I_{\mathrm{tot}} = \frac{U}{R_{\mathrm{tot}}} = I_1 = I_2 = \cdots = I_i$$

$$U_{\mathrm{tot}} = R_{\mathrm{tot}} \cdot I_{\mathrm{tot}} = U_1 + U_2 + \cdots + U_i$$

2.1.1 Spannungsteilerformeln

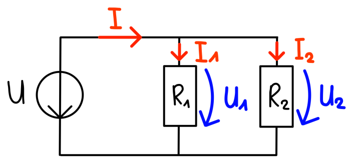
$$\boxed{U_i = U \cdot \frac{R_i}{R_{\mathrm{tot}}}}$$

Für den Fall oben gilt also:

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2.2 Parallelschaltung



Für die Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_i}$$

$$I_{\text{tot}} = \frac{U}{R_{\text{tot}}} = I_1 + I_2 + \cdots + I_i$$

$$U_{tot} = U_1 = U_2 = \cdots = U_i$$

2.2.1 Stromteilerformeln

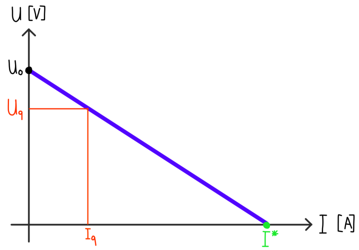
$$\boxed{I_i = I \cdot \frac{R_{\text{tot}}}{R_i}}$$

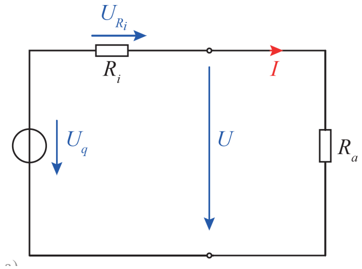
Für den Fall oben gilt also:

$$I_1 = I \cdot \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

2.3 Reale Spannungsquellen





Die **Leerlaufspannung** U_0 ist definiert als:

$$U(I = 0) = U_0$$

Der **Kurschlussstrom** I^* ist definiert als:

$$U(I^*) = 0$$

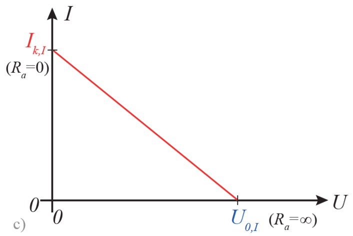
Der **Innenwiderstand** der Quelle ist definiert als:

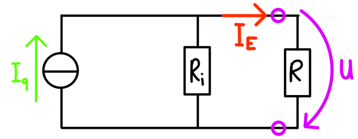
$$R_i = \frac{|\Delta U|}{|\Delta I|} = \frac{U_0 - U_q}{I_q}$$

Es gilt zudem:

- **Leerlauf**: $U = U_q$ und $R_a = \infty$
- **Belastung**: $U = U_q - I \cdot R_i$
- **Kurzschluss**: $U = 0$, $R_a = 0$ und $I_{\text{KS}} = \frac{U_q}{R_i}$

2.4 Reale Stromquelle





$$I_E = I_q \cdot \frac{R_i}{R + R_i}$$

$$U = R_{\text{tot}} \cdot I_E$$

Es gilt zudem:

- **Leerlauf**: $U = I_q \cdot R_i$ und $R_a = \infty$
- **Belastung**: $U = I \cdot R_a$
- **Kurzschluss**: $U = 0$, $R_a = 0$ und $I_{\text{KS}} = I_q$

2.5 Äquivalente Quellen

Eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand kann durch eine Stromquelle mit **gleichem** Innenwiderstand ersetzt werden!

$$\boxed{R_{i,I} = R_{i,U}}$$

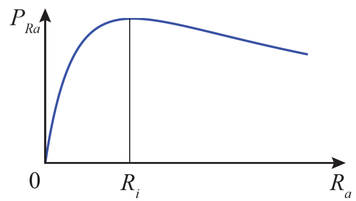
$$\boxed{U_q = I_q \cdot R_{i,I}}$$

$$\boxed{I_q = \frac{U_q}{R_{i,U}}}$$

2.6 Leistungsanpassung

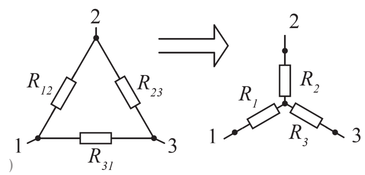
Frage nach einem Wert für R_a, bei welchem die Leistungsabgabe an den Lastwiderstand R_a maximal wird.

$$\boxed{R_i = R_a}$$



2.7 Stern-Dreieck-Umwandlung

2.7.1 Dreieck zu Stern

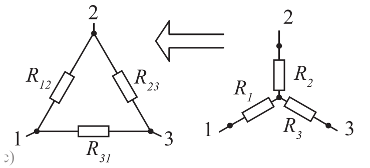


$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

2.7.2 Stern zu Dreieck



$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

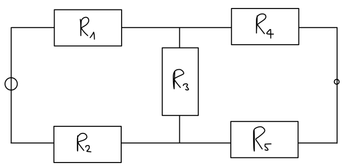
$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

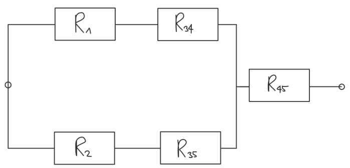
2.7.3 Spezialfall: Symmetrische Dreiecksschaltung

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = R_\triangle$$

$$\Longrightarrow R_\perp = \frac{R_\triangle^2}{3 \cdot R_\triangle} = \frac{R_\triangle}{3}$$

2.7.4 Anwendung



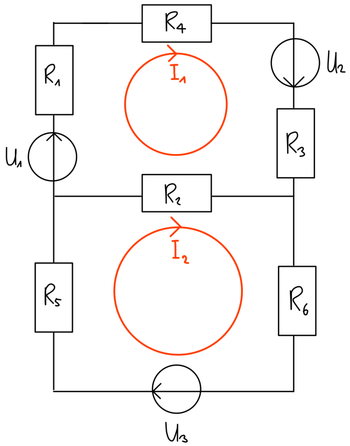


$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_5}$$

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5}$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5}$$

2.8 Maschenstromverfahren



Für jede Masche muss eine Gleichung der folgenden Form aufgestellt werden.
M1:

$$I_1 R_4 + U_2 + I_1 R_3 + (I_1 - I_2) R_2 + U_1 + R_1 I_1 = 0$$

M2:

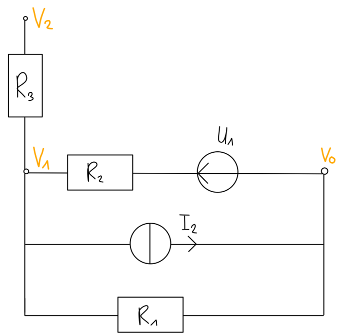
$$(I_2 - I_1) R_2 + I_2 R_6 + U_3 + I_2 R_5 = 0$$

Danach kann das Gleichungssystem nach I_1 und I_2 aufgelöst werden.

2.8.1 Anwendung

1. Mache alle Stromquellen unwirksam.
2. Finde alle Elementarmaschen E und weise ihnen einen Maschenstrom I_i zu.
3. Füge die Stromquellen wieder ein. Deren Strom ist ein bekannter Maschenstrom, der sich über eine beliebige Masche schliessen kann.
4. Stelle für jede ursprüngliche Elementarmasche E die Maschengleichung auf.
5. Ersetze mit $U = R \cdot (I_i + I_j + \dots)$ die Spannungen durch Maschenströme.
6. Löse das Gleichungssystem.

2.9 Knotenpotentialverfahren



Für jeden Knoten muss eine Gleichung der folgenden Form aufgestellt werden.
Ein Potential muss 0 gesetzt werden. $V_0 = 0$
Hier wird die Gleichung für den Punkt 1 aufgestellt.

$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_0 - U_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_0 - V_1}{R_1} - I_2 = 0$$

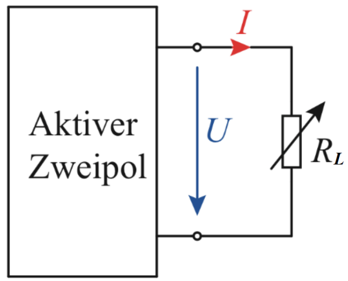
Danach kann das Gleichungsystem für V_0 etc. gelöst werden.
Der Strom von V_0 nach V_1 ist definiert als:

$$\boxed{I_{01} = \frac{V_0 - U_2 - V_1}{R_2}}$$

2.9.1 Anwendung

1. Mache alle Spannungsquellen unwirksam.
2. Weise einem Knoten das Potential $V_0 = 0$ zu.
3. Weise allen anderen Knoten ein Potential V_v zu.
4. Füge die Spannungsquellen U wieder ein: Gesamter Kurzschluss war vorher ein Knoten mit Potential V_μ. Durch das Einfügen werden daraus zwei Knoten mit V_μ an der Pfeilspitze und $V_\mu + U$ am anderen Ende.
5. Stelle für jeden Knoten die Knotengleichung auf, wobei für die beiden Knoten an den Enden einer Spannungsquelle die Knotengleichung für die gemeinsame Hüllfläche aufgestellt wrid.
6. Ersetze $I = \frac{V_v - V_w}{R}$ die Ströme durch die Knotenpotentiale.
7. Löse das Gleichungssystem. Es gilt: $U_{v \to w} = V_v - V_w$

2.10 Aktiver Zweipol



Ein aktiver Zweipol ist eine Schaltung mit Widerständen, Quellen und zwei **Zugriffspunkten**.
Das Ziel: Aktiver Zweipol $\Leftrightarrow$ reale Strom-/Spannungsquelle mit nur einer Quelle und einem Widerstand.

1. Berechne $U_{\text{Leerlauf}}(R_L = \infty)$ oder $I_{\text{Kurzschluss}}(R_L = 0)$

2. Mache die Quellen **unwirksam** und berechne den Widerstand R_Q zwischen den Anschlussklemmen.

3. $U_{\text{Leerlauf}} = R_Q \cdot I_{\text{Kurzschluss}}$

2.10.1 Umwandlung

- **Thévenin**: $U_q = U_{LL}$ Leerlaufspannung zwischen Klemmen.
- **Norton**: $I_q = I_{KS}$ Kurzschlussstrom zwischen Klemmen.
- **Innenwiderstand**: Entweder $R_i = \frac{U_q}{I_q}$ oder mache alle Quellen unwirksam und bestimme den Ersatzwiderstand an den Klemmen K_1 und K_2 des aktiven Zweipols: $R_i = R_{\text{Ersatz}}$

3 Elektrische und Magnetische Felder

3.1 Elektrisches Feld

3.1.1 Coulomb'sche Kraft

Die Kraft, welche auf die Ladung Q_0 wirkt ist definiert als:

$$\underline{F} = \frac{Q_0 \cdot Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\underline{r}_0 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|^3}$$

3.1.2 Elektrisches Feld

Das elektrische Feld ist dann definiert als:

$$\boxed{\underline{E} = \frac{\underline{F}}{Q} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]}$$

Die elektrischen Feldlinien beginnen bei positiven und enden bei negativen Ladungen und schneiden sich nie. $\boxed{+ \rightarrow -}$

3.2 Plattenkondensator

Für den Plattenkondensator gelten folgende Gesetze:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \quad \left[\frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{F}\right]}$$

wobei C die Kapazität, A die Fläche der Platten und d der Abstand der Platten ist.

$$U = \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{s}$$

$$Q = \int_{\text{Hüllfläche}} \varepsilon_0 \underline{E} \cdot d\underline{A}$$

Ein Kondensator ist definiert durch zwei voneinander isolierten Elektroden (elektrisch leitfähigen Körpern).
Wird ein Kondensator mit einer Spannungsquelle verbunden, wird die Elektrode am Pluspol positiv, die andere negativ geladen.

3.2.1 Parallelschaltung von Kondesatoren

Für eine Parallelschaltung von Kondensatoren gilt:

$$U = U_1 = U_2 = \dots$$

$$C \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + \dots$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

$$\boxed{C_{\text{tot}} = C_1 + C_2 + \dots = \sum_n C_n}$$

3.2.2 Serienschatlung von Kondensatoren

Für eine Serienschaltung von Kondensatoren gilt:

$$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2 = \dots$$

$$Q_1 = Q_2 = \dots$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots$$

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots = \sum_n \frac{1}{C_n}}$$

Zudem gilt für die einzelnen Spannungen:

$$U_i = U \cdot \frac{C_{\text{tot}}}{C_i}$$

3.2.3 Dielektrikum im Plattenkondensator

Das Dielektrikum mit der Dielektrikumskonstante ε_r hat folgende Wirkung:

$$E_i = \frac{E}{\varepsilon_r}$$

$$C_i = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{d} = C_0 \cdot \varepsilon_r$$

3.2.4 Energie im Plattenkondensator

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

3.2.5 Elektrischer Fluss

$$\Phi = \iint_A \varepsilon_0 \underline{E} \cdot d\underline{A}$$

3.3 Transiente Vorgänge in RC-Netzwerken

Es gilt die folgende DGL:

$$\boxed{i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt}$$

Der Spannungsverlauf u_C kann mit dem folgenden Ansatz herausgefunden werden:

$$\boxed{u_C(t) = u_C(\infty) - [u_C(\infty) - u_C(0)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

mit $\tau = R_{\text{effektiv}} \cdot C$.
Der Stromverlauf i_C kann mit dem folgenden Ansatz herausgefunden werden:

$$\boxed{u_C(t) = \frac{1}{R_{\text{effektiv}}} [u_C(\infty) - u_C(0)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Weiter gilt:

Schaltzeitpunkt	$t = 0$	Kurzschluss, es fliesst Storm
Eingeschwungen	$t \rightarrow \infty$	Leerlauf, es fliesst kein Strom

3.4 Magnetfeld

3.4.1 Stromdurchflossener Leiter

$$\underline{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{2\pi r}$$

$$\underline{H} = \frac{N \cdot I}{2\pi r}$$

Die magnetische Feldstärke $\underline{H}$ ist unabhängig von der Umgebung (Vakuum, Permeabilität, etc.). Somit ergibt sich:

$$\boxed{B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \underline{H}}$$

Kraft auf einen Leiter:

$$F = B \cdot I \cdot l$$

3.4.2 Magnetischer Fluss

$$\Phi_M = B \cdot A$$

$$\boxed{\Phi_M = \iint_A \underline{B} \cdot d\underline{A}}$$

Da die Feldlinien immer geschlossen sein müssen gilt zudem:

$$\Phi_M = \oint_A \underline{B} \cdot d\underline{A} = 0$$

3.4.3 Durchflutungsgesetz

$$\boxed{\oint_S \underline{H} \cdot d\underline{s} = \Theta = \sum_n I_n = \iint_A \underline{J} \cdot d\underline{A}}$$

3.4.4 Ringkernspule

$$\Theta = N \cdot I = \oint_S \underline{H} \cdot d\underline{s} = H \cdot \oint_S d\underline{s} = H \cdot 2\pi r$$

$$\Longrightarrow \underline{H} = \frac{N \cdot I}{2\pi r} \cdot \underline{e}_\varphi$$

3.4.5 Materie im Magnetfeld

- **Diamagnetismus** $\mu_r < 1$
- **Paramagnetismus** $\mu_r > 1$
- **Ferromagnetismus** $\mu_r \gg 1$

3.5 Induktivität

$$\boxed{L = \frac{N \cdot \Phi_M}{I} = \frac{N^2}{R_m} \quad \left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H}\right]}$$

3.5.1 Schaltungen von Induktivitäten

Für die Schaltungen von Induktivitäten gilt genau das gleiche wie für die Serien- bzw. die Parallelschaltung von Widerständen.

- **Serienschaltung**: $L_{\text{ges}} = \sum_n L_n$
- **Parallelschaltung**: $\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_n \frac{1}{L_n}$

3.5.2 Induktionsgesetz

$$u = N\frac{d\Phi}{dt}$$

3.5.3 Energie in der Induktivität

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

3.5.4 Transiente Vorgänge in RL-Netzwerken

Es gilt die folgende DGL:

$$\boxed{u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}, \quad i_L = \frac{1}{L}\int u_L dt}$$

Der Stromverlauf i_L kann mit dem folgenden Ansatz herausgefunden werden:

$$\boxed{i_L(t) = i_L(\infty) - [i_L(\infty) - i_L(0)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

mit $\tau = \frac{L}{R_{\text{effektiv}}}$.
Der Spannungsverlauf u_L kann mit dem folgenden Ansatz herausgefunden werden:

$$\boxed{u_L(t) = R_{\text{effektiv}} \cdot [i_L(\infty) - i_L(0)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Weiter gilt:

Schaltzeitpunkt	$t = 0$	Leerlauf, es fliesst kein Strom
Eingeschwungen	$t \to \infty$	Kurzschluss, es fliesst Storm

3.6 Analogie: Magnetisches Netzwerk

Analog zu einem elektrischen Netzwerk kann man ein magnetisches Netzwerk definieren.
Dabei gilt:

Leitfähigkeit	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
Widerstand	$R_m = \frac{l}{\mu \cdot A}$ in A/Vs
Leitwert	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$ in Vs/A
Spannung	$V_{m12} = \int_1^2 \underline{H} \cdot d\underline{s}$
Strom/Fluss	$\Phi_M = \iint_A \underline{B} \cdot d\underline{A}$ in Wb
Ohmsches Gesetz	$\Theta = N \cdot I = R_m \cdot \Phi_M$
Maschengl.	$\Theta = \sum_{\text{Masche}} V_m = \sum_{\text{Masche}} R_m \Phi_M$
Knotengl.	$\sum_{\text{Knoten}} \Phi = 0$

4 Wechselstrom

4.1 Einleitung

Wichtig für die Arbeit mit Wechselströmen:
ES KANN GLEICH MIT DEN GLEICHEN GESETZEN WIE FÜR GLEICHSTROM GEARBEITET WERDEN!
Jedoch betrachten wir jetzt nicht mehr Widerstände, sondern *Impendanzen*.

4.2 Spannung und Strom in komplexer Darstellung

Spannung: $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_U)$

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\angle(\varphi_U) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\cos(\varphi_U) + j \cdot \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\sin(\varphi_U)}$$

Strom: $i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t + \varphi_I)$

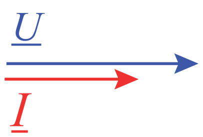
$$\boxed{\underline{I} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\angle(\varphi_I) = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\cos(\varphi_I) + j \cdot \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}\sin(\varphi_I)}$$

4.3 Wichtige Begriffe

- Periodendauer T: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Frequenz f: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$
- Phase φ für Spannung φ_U und für Strom φ_I
- Spannung: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$
- Strom: $i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$
- Phasenverschiebung: $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$
  Ist diese positiv, so eilt die Spannung dem Strom voraus. Ist diese negativ, so eilt die Spannung dem Strom nach.
- Gleichrichtwert: $|\bar{i}| = \frac{1}{T}\int_0^T |i| dt = \frac{2}{\pi}\hat{\imath}$
- Effektivwert: $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$
  Wichtig für komplexe Darstellung!!!

4.4 Auswirkungen von Bauelementen in Netzwerk

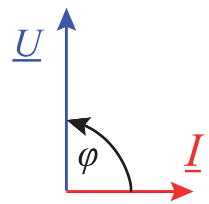
4.4.1 Widerstand



$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}, \quad \varphi = 0}$$

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t), \quad i_R(t) = u_R(t) \cdot \frac{1}{R}$$

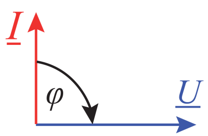
4.4.2 Induktivität



$$\boxed{\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)dt$$

4.4.3 Kondensator



$$\boxed{\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt, \quad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

4.5 Impendanzen

4.5.1 Allgemein

$$\boxed{\underline{Z} = \underbrace{R}_{\text{Wirkwiderstand}} + j \cdot \underbrace{X}_{\text{Blindwiderstand}}}$$

4.5.2 Widerstand

$$\boxed{\underline{Z}_R = R}$$

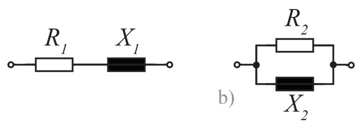
4.5.3 Induktivität

$$\boxed{\underline{Z}_L = j\omega L}$$

4.5.4 Kondensator

$$\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \cdot \frac{1}{\omega C}}$$

4.6 Äquivalente Serie- und Parallelschaltung



Jede aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand bestehende Reihenschaltung kann in eine elektrisch gleichwertige Parallelschaltung umgewandelt werden und umgekehrt!
Äquivalente Werte gelten aber nur für bestimmte Frequenz!

$$\boxed{R_2 = \frac{R_1^2 + X_1^2}{R_1}, \quad X_2 = \frac{R_1^2 + X_1^2}{X_1}}$$

4.7 Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz ist definiert, als diejenige Frequenz, bei welcher die Gesamtimpendanz eines Systems **rein reell** wird.

$$\Im\left(\underline{Z}_{ges}(\omega_r)\right) = 0$$

4.8 Leistungen

Wichtig hier, dass die Phase φ bezogen auf die Spannung ist.
Spannung eilt Strom voraus (+) oder nach (-)

4.8.1 Augenblicksleistung

$$p = u \cdot i = \hat{u} \cdot \hat{\imath} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t)$$

mit $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ folgt:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \hat{u} \cdot \hat{\imath}\,(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)) =$$

$$= |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cos(\varphi) - |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cos(2\omega t + \varphi)$$

mit $\cos(2\omega t + \varphi) = \cos(2\omega t + 2\varphi)\cos(\varphi) + \sin(2\omega t + 2\varphi)\sin(\varphi)$ folgt dann:

$$\boxed{p = \underbrace{|\underline{U}||\underline{I}|\cos(\varphi)\left[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)\right]}_{\text{Wirkleistung}} - \underbrace{|\underline{U}||\underline{I}|\sin(\varphi)\sin(2\omega t + 2\varphi)}_{\text{Blindleistung}}}$$

4.8.2 Wirkleistung

$$P = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cos(\varphi) = S\cos(\varphi) \quad [\mathrm{W}]$$

4.8.3 Blindleistung

$$Q = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \sin(\varphi) = S\sin(\varphi) \quad [\mathrm{V\,Ar}]$$

$Q > 0$ da $\varphi > 0$: induktiver Verbraucher
$Q < 0$ da $\varphi < 0$: kapazitiver Verbraucher

4.8.4 Scheinleistung

$$S = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\mathrm{V\,A}]$$

4.8.5 Leistungsfaktor

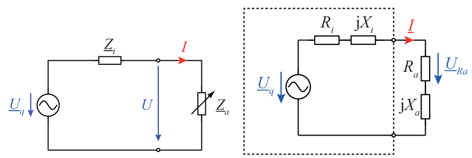
$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

Falls dieser Leistungsfaktor 1 ist, also die Phasenreserve $\frac{\pi}{2}$, dann gibt es keine Blindleistung.

4.8.6 Komplexe Scheinleistung

$$\underline{S} = S\cos(\varphi) + jS\sin(\varphi) = P + jQ = \underline{U}\underline{I}^*$$

4.9 Leistungsanpassung



Wir wollen die Wirkleistung in R_a maximieren:

$$|\underline{I}| = \frac{|\underline{U}_q|}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_a|} = I = \frac{U_q}{\sqrt{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2}}$$

$$P = I^2 \cdot R_a = \frac{U_q^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2 + (X_i + X_a)^2}$$

Der Nenner muss also minimal werden
$\Longrightarrow X_a = -X_i$, dann ist es gleich wie im DC-Netzwerk:

$$\boxed{\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*}$$

4.10 Serienschwingkreis

Die Güte für einen *Serienschwingkreis* ist definiert als:

$$Q = \frac{\omega \cdot L}{R}$$

und falls noch ein Kondensator hinzugefügt wurde:

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

4.11 Parallelschwingkreis

Die Güte für einen *Parallelschwingkreis* ist definiert als:

$$Q = \frac{\omega \cdot C}{1/R}$$

und falls noch eine Induktivität hinzugefügt wurde:

$$Q = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Die Dämpfung d ist der Kehrwert von Q: $d = \frac{1}{Q}$

5 Appendix

5.1 Complex analysis

For a complex number

$$z = a + j \cdot b = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

we have the following relations:

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\angle(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0 \end{cases}}$$

5.1.1 Calculation rules

We have three complex numbers $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Now the relation

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$$

is given.

$$\boxed{|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|}}$$

$$\boxed{\angle(z) = \angle(z_1) + \angle(z_2) - \angle(z_3)}$$